DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, n et d sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On notera I_n la matrice unité à n lignes, J_n la matrice carrée à n lignes dont tous les coefficients valent 1 et k_n la matrice colonne à n lignes dont toutes les composantes valent 1.

Une matrice M carrée à n lignes est dite satisfaire la propriété (P) si les 5 conditions suivantes sont remplies :

1. $M = (m_{ij})$ est une matrice symétrique réelle,
2. La diagonale de M est nulle,
3. Chaque ligne de M comporte d coefficients égaux à 1 et n-d nuls,
4. Si $m_{ij} = 0$ et $i \neq j$ alors il existe un seul indice k pour lequel on a la double égalité $m_{ik} = m_{jk} = 1$,
5. Si $m_{ij} = 1$ alors il n'existe aucun indice k pour lequel on a la double égalité $m_{ik} = m_{jk} = 1$.

N.B. — *Les deux parties du problème peuvent être traitées indépendamment.*

I

Dans cette partie M désigne une matrice satisfaisant (P).

1° Exprimer les produits $M.J_n$, $J_n.M$ et M^2 sous forme de combinaisons linéaires de M, I_n et J_n.

2° Donner l'image de J_n puis montrer qu'elle coïncide avec le noyau de $M\text{-}dI_n$.

3° Exprimer n en fonction de d.

4° Montrer que les valeurs propres de M autres que d sont les racines a et b du polynôme $X^2 + X + 1 - d$.

5° On note $r = \dim \ker (M - aI_n)$ et $s = \dim \ker (M - bI_n)$. Exprimer en fonction de d la matrice produit :

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

puis les scalaires $(r - s)(a - b)$ et $(a - b)^2$.

6° Pour quelles valeurs de d le réel $a - b$ est-il irrationnel ?

7° Montrer que si $a - b$ est rationnel, alors $a - b$ est entier diviseur de $d(d - 2)$. Donner dans ce cas l'ensemble fini des valeurs possibles pour d.

II

On s'intéresse dans cette partie au cas $d = 3$.

On rapporte l'espace euclidien $\mathbb{R}^5$ à sa base orthonormale naturelle $\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant 5\}$, et on désigne par u_i, $1 \leqslant i \leqslant 10$, les 10 vecteurs distincts, sommes de deux vecteurs différents de cette base.

1° Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de terme général $a_{ij} = < u_i , u_j >$, $1 \leqslant i, j \leqslant 10$. Écrire une combinaison linéaire M de A, I_{10}, J_{10} satisfaisant (P).

2° Montrer que si une application linéaire q permute les vecteurs de base, elle permute les vecteurs u_i en conservant leurs produits scalaires, c'est-à-dire $< u_i , u_j > = < q(u_i) , q(u_j) >$, $1 \leqslant i, j \leqslant 10$.

3° Montrer qu'inversement toute permutation p des vecteurs u_i qui conserve les produits scalaires $< u_i , u_j >$, $1 \leqslant i, j \leqslant 10$, est restriction d'une transformation orthogonale q permutant les vecteurs de base. Étudier l'unicité de q.

On note v_i, $1 \leqslant i \leqslant 10$, les 10 vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont les composantes dans la base orthonormale naturelle sont données par les colonnes du tableau suivant, où $h = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1	1	−1	1	$\frac{-1}{h}$	0	h	$\frac{1}{h}$	0	h
1	1	1	−1	h	$\frac{-1}{h}$	0	h	$\frac{1}{h}$	0
1	−1	1	1	0	h	$\frac{-1}{h}$	0	h	$\frac{1}{h}$

Tournez la page S. V. P.

Page 54 1986 E.n.s.e.t. Section A1 Math 2

4° Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ à termes positifs avec $b_{ij} = | < v_i , v_j > |$, $1 \leqslant i , j \leqslant 10$. Donner une combinaison linéaire M′ de B, I_{10} , J_{10} vérifiant (P).

5° Établir une bijection f de l'ensemble des 10 vecteurs u_i vers celui des 10 vecteurs v_i telle que :

$$| < f(u_i), f(u_j) > | = \sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})\, \delta_{ij} + (1 - \sqrt{5}) < u_i, u_j >,$$
$$1 \leqslant i , j \leqslant 10 .$$

6° En déduire que le groupe R des rotations de $\mathbb{R}^3$ qui conservent l'ensemble des dix droites sous-tendues par les vecteurs v_i , $1 \leqslant i \leqslant 10$ est isomorphe à un sous-groupe G du groupe S_5 des permutations des vecteurs e_i , $1 \leqslant i \leqslant 5$.

7° *a.* Vérifier l'appartenance à R d'un demi-tour autour d'un axe de coordonnées, ainsi que d'une rotation d'un tiers de tour autour de la droite engendrée par le vecteur v_1 .

b. Décomposer sur le corps des nombres réels le polynôme $X^5 - 1$ et en déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en fonction de h.

c. Écrire dans la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ la matrice d'une rotation de $\frac{2\pi}{5}$ autour de la droite dirigée par le vecteur de coordonnées (1, 0, h).

d. Donner des rotations d'ordre 5 appartenant à R.

8° Reconnaître G en étudiant la signature de ses éléments.